

# کاربرد هندسه فراکتالی در محاسبه مقاومت الکتریکی شبکه سرپینسکی

مژگان دورنما، کارشناس ارشد فیزیک حالت جامد، پژوهش‌سرای آیت‌الله مروج ناحیه ۱ اردبیل  
توحید گنج، کارشناس ارشد فیزیک، دبیر فیزیک ناحیه ۱ اردبیل و سرگروه فیزیک استان اردبیل

## چکیده

فراکتال‌ها شکل‌هایی خودمتشابه با بعد گویا هستند. با مطالعه هندسه فراکتالی می‌توان بعضی از مسئله‌های فیزیک (مانند رسانش گرمایی، الکتریکی و مقاومت و...) مربوط به اجسام بی‌نظم مانند اجسام بی‌ریخت و شاره‌ها را مطالعه کرد. مثلث سرپینسکی یکی از فراکتال‌هاست که در این مقاله با مطالعه هندسه آن، مقاومت الکتریکی یک شبکه مثلثی سرپینسکی محاسبه شده است. با طراحی فعالیت دانش‌آموزی در کلاس می‌توان ضمن آشنا ساختن دانش‌آموزان با کاربردهای فراکتال‌ها در فیزیک، درستی محاسبات ریاضی مربوط به شبکه مقاومت سرپینسکی را بررسی کرد.

**کلیدواژه‌ها:** فراکتال، مثلث سرپینسکی، مقاومت معادل

## ۱. مقدمه

پدیده‌ها یا اشکالی در طبیعت یافت می‌شوند که برای مطالعه دقیق آن‌ها نیازمند هندسه غیراقلیدسی هستیم. هندسه‌ای که اشکال آن با فرمول‌های خطی و ساده ریاضی، غیر قابل بحث و مطالعه است و قانون‌های کلی حاکم بر آن به مقیاسی که در آن کار می‌کنیم وابسته نیست یعنی هندسه‌ای به مراتب پیچیده‌تر از هندسه اقلیدسی که رفتار اشکال آن آشفته‌تر و پیچیده‌تر است یعنی هندسه فراکتالی. فراکتال از کلمه فراکتوس به معنی «شکسته» گرفته شده است. در حقیقت فراکتال‌ها شکل‌هایی خود متشابه هستند. بدین معنی که هر جزء از شکل با کل شکل متشابه است. مثلاً یک تکه ابر می‌تواند تقریباً شامل تمام ویژگی‌های یک ابر بزرگ باشد. [۱]

اشیای خودمتشابه هزاران سال در کاربردهای تزئینی ریاضی به کار گرفته می‌شدند. ریاضی‌دانان جدید همچون کانتور، هاسدروف، جولیا، کخ، پینو و سرپینسکی مفهوم خودهمانندی را برای شمول اشیایی که در مقیاس‌های نامتناهی خودهمانند هستند توسعه دادند. [۲]

هر چند فراکتال‌ها اشکال پیچیده‌ای دارند اما آن‌ها را می‌توان با استفاده از روش‌ها و توزیع‌های آماری یا الگوهای

ریاضی مانند الگوی استقرایی مورد بررسی و مطالعه قرار داد. بعد یک جسم از ویژگی‌های اساسی فراکتال‌هاست. فراکتال‌ها از فرمول قانون توان پیروی می‌کنند به طوری که بعدشان با توجه به الگوریتم تولید آن‌ها و قانون توان به دست می‌آید. بعد جسم یعنی (ضریب بزرگ‌نمایی) تعداد کپی‌های جسم فراکتالی است. [۳]

طبیعت از میان انواع اشکال گوناگونی که می‌تواند در شکل‌گیری استفاده کند شکل‌گیری فراکتالی را ترجیح می‌دهد. بعد فراکتال در تشخیص میزان پیچیدگی و زیبایی فراکتال‌ها به صورت طبیعی و ساخته ذهن بشر نقش بسزایی ایفا می‌کنند. هیچ‌کس واقعاً نمی‌داند چند ستاره در آسمان شب چشمک می‌زند، ولی نحوه شکل‌گیری و قرارگیری آن‌ها در عالم همواره مایه حیرت و شگفتی بوده است. اختر فیزیک‌دانان بر این باورند که ماهیت فراکتالی گاز میان ستاره‌های کلید راهنمای این مسئله باشد. فراکتال پخش و انتشار گازها به صورت سلسله مراتبی است که نظیر آن در خزیدن‌های دود در هوا یا موج‌خوردن ابرها در آسمان دیده می‌شود. اشکال آشفته‌گی ابرها در آسمان و در فضا الگویی نامنظم، اما تکرار شونده به آن‌ها می‌بخشد که توصیفش بدون کمک گرفتن از هندسه فراکتالی غیرممکن خواهد بود.

مثلاً دانه‌های برف، بلورهای یخ هستند. یا بلور ماده‌ای است که مولکول‌های سازنده آن به شیوه خاصی آرایش یافته‌اند که به آن شبکه بلوری می‌گویند. مولکول‌های آب در یخ، شبکه‌ای شش گوشه تشکیل می‌دهند. باید توجه کرد که برف، قطرات یخ‌زده باران نیست. این قطرات یخ‌زده یا تگرگ، الگوی پیچیده و منظم دانه‌های برف را ندارند. بلورهای برف از تراکم مستقیم بخار آب به یخ تشکیل می‌شوند که فرایندی است که در ابرها روی می‌دهد.



شکل ۱. بلور شش گوشه یخ

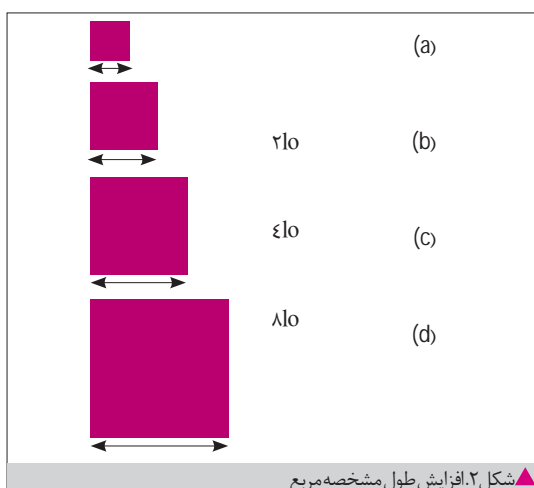
طرح زیبایی دانه‌های برف با رشد بلور به وجود می‌آید. شکل پایه و اصلی بلورهای برف، منشور شش گوشه است که در شکل ۱ می‌بینیم.

به عنوان مثال توالی مربع‌ها در شکل ۲ که همه مشابه‌اند به‌طور پی‌درپی با دو برابر کردن طول یا لبه‌هایشان ایجاد می‌شود. محیط‌های خارجی عبارت‌اند از:

$$p = 4l, 4(2l), 4(4l), 4(8l)$$

بنابراین مساحت‌ها به ترتیب عبارت‌اند از:

$$A = L^2, (2L)^2, (4L)^2, (8L)^2$$



▲ شکل ۲. افزایش طول مشخصه مربع

می‌بینیم که محیط به‌صورت خطی به طول مشخصه وابسته است. در حالی که مساحت وابستگی مجذوری دارد. یک حجم هندسی مانند فضای پیرامون ما و هر شکل آن که دارای طول، عرض و ارتفاع است دارای بعد ۳ است. اگر در یک مکعب مربع (فضا) هر ضلع را به  $d$  قسمت مساوی تقسیم کنیم مکعب اصلی به تعداد مکعب کوچک‌تر تقسیم می‌شود. برای مکعب‌ها مساحت سطح عبارت است از:

$$A = 6L^2, 6(2L)^2, 6(4L)^2, 6(8L)^2$$

و رابطه حجم‌ها به‌صورت زیر است:

$$V = L^3, (2L)^3, (4L)^3, (8L)^3$$

به‌طور کلی داریم:

$$V^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = L$$

پس در هندسه اقلیدسی یک مکعب با رابطه بین طول مشخصه و حجم آن مشخص می‌شود. در نتیجه در سه بعد رابطه طول مشخصه با بعد به‌صورت زیر است:

$$L = V^{\frac{1}{d}}, d = 3$$

این شکل به این دلیل به‌وجود می‌آید که بعضی سطوح بلور، که به آن وجوه رشد می‌گویند بسیار به آهستگی رشد می‌کنند. بنابراین اگر این منشور بخواهد رشد کند دو راه برایش وجود دارد. از راه قاعده و یا از راه وجه‌های جانبی و در اثر رشد شکل‌های صفحه‌مانند یا ستون‌مانند پدید خواهند آمد. اینکه کدام یک از شکل‌ها پدید بیایند و بلور برای رشد کدام راه را انتخاب کند، به سرعت رشد هر سطح بستگی دارد. بعضی دانه‌های برف همین منشورهای شش‌گوشه ساده هستند اما اکثر آن‌ها شکل‌های پیچیده‌تری دارند. یعنی انواع متفاوتی از بلور وجود دارد. [۴]

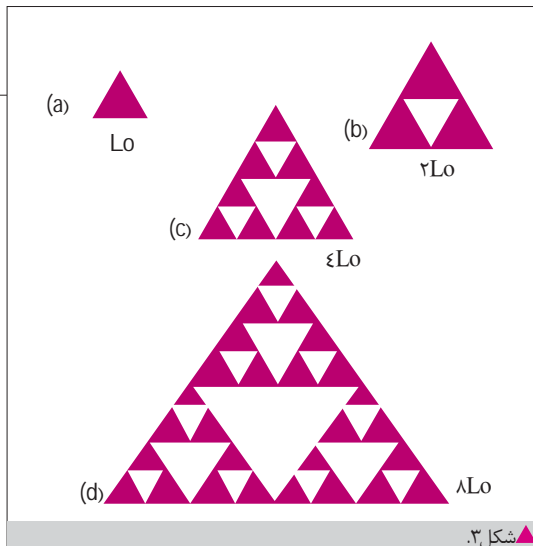
بازشناسی مفاهیم تعادل، تقارن، ضرب آهنگ و خودهمانندی برای فراهم آوردن هندسه فراکتال موردنظر است. هندسه فراکتالی مطالعه اشکال ریاضی است که نمایانگر جریانی از اجزای خودهمانند بی‌انتها و پیچ‌درپیچ طبیعت است. نه تنها فرم فیزیکی طبیعت فراکتال است بلکه شیوه دگرگونی طبیعت در طول زمان نیز فراکتال است. فرم‌های طبیعی دارای ساختار سازمان‌دهنده هستند و هندسه فراکتالی شیوه‌ای واضح برای درک و توضیح این ساختار است. در این تحقیق ابتدا مفاهیم اساسی فراکتال و بُعد آن‌ها و چگونگی تولید و محاسبه بعد چند نوع فراکتال ساخته ذهن بشر را مطالعه می‌کنیم سپس به‌عنوان یک مطالعه موردی از هندسه فراکتالی برای محاسبه مقاومت‌های الکتریکی در شبکه‌های برق استفاده می‌کنیم.

## ۲. مقایسه هندسه اقلیدسی و هندسه فراکتالی

بیشتر اشکالی که در هندسه اقلیدسی مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند ساخته فکر و ذهن انسان‌اند. این اشکال ترکیبی از خطوط راست، منحنی‌ها، کمان‌ها، دایره‌ها، سطوح یا حجم‌های مکعب مستطیل، کره‌ها و استوانه و... هستند. اشکال اقلیدسی را می‌توان براساس بعدشان به دسته‌های ۱ و ۲ و ۳ بعدی طبقه‌بندی کرد. یک نقطه دارای طول و عرض و ارتفاع نیست لذا بعد آن صفر است. یک خط راست فقط دارای طول است لذا بعد آن یک است. یعنی اگر یک پاره‌خط را به  $d$  قسمت مساوی تقسیم کنیم تعداد پاره‌خط‌های کوچک‌تر  $d$  تا است لذا خط یا پاره‌خط دارای بعد یک است.

یک صفحه و هر شکلی که در آن رسم شود دارای طول و عرض هستند لذا دارای بعد ۲ است. یعنی اگر در یک مربع (در صفحه) هر ضلع را به  $d$  قسمت مساوی تقسیم کنیم مربع اصلی به تعداد مربع کوچک‌تر تقسیم می‌شود [۵]

در هندسه اقلیدسی برای توصیف جسم دو بعدی از مساحت، محیط، طول مشخصه (یا طول) استفاده می‌شود.



شکل ۳.

همین طور:

$$(11)$$

$$p(2L) = c^{2D} L^D$$

از دو معادله داریم:

$$(12) \quad 3 = 2^D, D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$$

که  $D$  نقش بعد برای رویه سرپینسکی فراکتالی را دارد مانند  $d$  که نقش بعد برای اجسام اقلیدسی را دارد. از این مقدمه برای محاسبه مقاومت فراکتال شبکه مقاومتی سرپینسکی استفاده می‌کنیم. [۳]

### ۳. محاسبه مقاومت الکتریکی در یک شبکه مقاومتی توسط فراکتال‌ها

شناخت ویژگی‌های مواد جامد بی‌نظم یکی از زمینه‌های مهم تحقق در علم مواد و ماده چگال جدید است. مثلاً برای شناخت چگونگی انتقال گرما در مواد بی‌ریخت (مدل‌سازی انتقال گرما) و بررسی رفتارهای ترمودینامیکی و رسانش الکتریکی می‌توان از هندسه خودمتشابه فراکتالی کمک گرفت.

به‌عنوان مثال موردی از کاربرد هندسه فراکتالی در فیزیک، با فرض اینکه دانش‌آموزان قبلاً محاسبه مقاومت‌های سری و موازی را یاد گرفته‌اند، مبحث محاسبه مقاومت الکتریکی معادل را مطرح می‌کنیم. این روش می‌تواند به‌صورت تجربی در کلاس درس به‌کار گرفته شود.

مقاومت ماده‌ای به سطح مقطع  $A$  و طول  $L$  و مقاومت ویژه  $\rho$  صورت زیر است:

$$(13) \quad R = \rho \frac{L}{A}$$

سیم شکل ۴ الف یک جسم یک بعدی است و اگر ما فقط طول آن را دو برابر کنیم مقاومتش دو برابر می‌شود.

$$R \sim L^1$$

همین طور طول مشخصه در دو بعد به‌صورت زیر است:

$$L = A^{\frac{1}{d}}, d = 2$$

این فرایند می‌تواند به بعدهای بالاتر تعمیم یابد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در هندسه اقلیدسی اشکال دارای بعد صحیح‌اند. [۳]

اما برخی اشکال ساخته ذهن انسان مانند مثلث سرپینسکی و همچنین بعضی شکل‌های طبیعی مثل خطوط ساحلی، شکل ریه‌ها، مرجان‌ها، ساختار خوشه‌ها، ابرها، مسیر رودخانه‌ها و... دارای بعد غیر صحیح یا بعد اعشاری‌اند. هندسه این‌گونه اجسام هندسه فراکتالی است. معمولاً فراکتال‌ها را می‌توان با تکرار یا دور زدن الگویی تولید کرد ولی نمی‌توان یک فرمول جبری برای توضیح یا مطالعه آن به‌کار برد. در حالی که اشکال هندسه اقلیدسی مانند دایره، کره، چندضلعی‌ها و... را می‌توان با استفاده از یک فرمول جبری مورد بحث و بررسی قرار داد. همان‌طور که گفته شد فراکتال از دید هندسی، جسمی است که دارای ویژگی خودمتشابهی است. بدین معنی که برای تبدیل هر جزء شکل به کل شکل یا اجزای کوچک‌تر از آن، باید همه ابعاد به یک مقیاس بزرگ شوند. بعد فراکتال عددی است گویا و غیر صحیح. زیرا در فراکتال برای تبدیل شدن به مقیاس بزرگ‌تر، باید شکل در هر راستا با ضریب‌های متفاوت بزرگ شود. اکنون بعد فراکتالی (توان پوسته پوسته شدن) را برای رویه شکل ۳ که در حد بی‌نهایت یک رویه سرپینسکی است بررسی می‌کنیم. مثلث سرپینسکی یکی از فراکتال‌ها (شکل‌های خودهمانند) است که با الگوی زیر تولید می‌شود: یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید. وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید. چهار مثلث تشکیل می‌شود. مثلث وسطی را حذف کنید. سپس همین کار را با سه مثلث باقیمانده انجام دهید و این کار را همین‌طور ادامه دهید.

$L$  (طول مشخصه) فاصله بین دو رأس خارجی است.

محیط رویه به‌صورت زیر به‌طور پی‌درپی زیاد می‌شود:

$$(8)$$

$$p(2L) = 3cL^D$$

$$p(L_n) = 3^n(L_n), p(2L_n) = 9L_n, p(4L_n) = 27L_n,$$

و با تعمیم به مراتب بالاتر تکثیر داریم:

$$(9)$$

$$p(2^n L_n) = 3^n L_n,$$

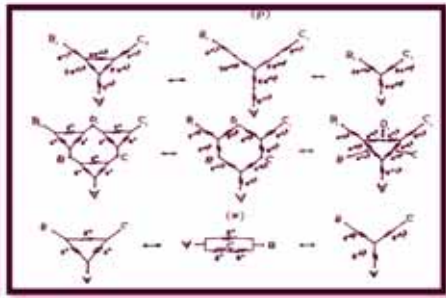
$$p(2L) = 3p(L)$$

با فرض زیر قانون توان را بین  $L, p$  پیدا می‌کنیم:

$$(10)$$

$$p(L) = cL^D$$

که  $c$  ثابت تناسب است.



▲ شکل ۶.

به شکل ۶ الف دقت می‌کنیم. یک اتصال مثلثی سیمی بین رأس‌های A, B, C را به صورت مجموعه‌ای از مقاومت‌های سری و موازی در نظر می‌گیریم. مقاومت معادل بین A, B (اگر هر مقاومت R باشد) به صورت  $\frac{2R}{3}$  است.

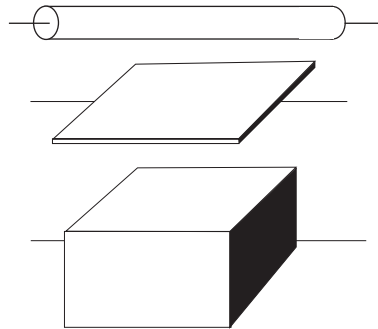
پس ما در اینجا مجموعه‌ای از مقاومت‌ها را با معادل آن‌ها جایگزین می‌کنیم. در این شکل مثلث مقاومت‌ها را با ستاره‌ای از مقاومت‌ها هر یک با مقاومت  $\frac{R}{3}$  جایگزین می‌کنیم. در این حالت مقاومت‌های بیین دو نقطه خارجی باقی می‌ماند: یکی مقاومت بین نقاط A, B و دیگری مقاومت بین نقاط A, C. بعد از جایگزینی مقاومت‌های داخلی مقاومت معادل  $\frac{2R}{3}$  می‌شود.

در شکل ۵. a شبکه‌ای از مقاومت‌ها را به شکل مثلثی در نظر گرفته‌ایم. پس از کاهش شبکه نتیجه را به مراتب بالاتر اعمال می‌کنیم. ترتیب مثلث‌ها در شکل ۵-b به طور طرح‌وار در شکل ۶-b نشان داده شده است. گام اول برای جایگزینی مقاومت معادل سه مثلث به همان روش شکل ۶-الف است. به خاطر هندسه رویه سرپینسکی مثلث بزرگ‌تری تشکیل می‌دهیم. باز با استفاده از همان روش مقاومت معادل را در هر مرتبه از تکثیر رویه‌ها به دست می‌آوریم. نتایج برای مقاومت بین رأس‌های خارجی برای رویه‌هایی با عدد تکثیر افزایشی به صورت زیر است:

$\frac{2R}{3}$  برای مثلث داخلی شکل ۶ الف،  $\frac{10R}{9}$  برای اولین رویه تکثیر یافته با ۹ مقاومت مانند شکل ۵-الف،  $\frac{50R}{27}$  برای دومین رویه تکثیر یافته با ۲۷ مقاومت مانند شکل ۵-ب،  $\frac{25R}{81}$  برای سومین رویه با ۸۱ مقاومت مانند شکل ۵-ج،  $\frac{1250R}{243}$  برای چهارمین رویه با ۲۴۳ مقاومت،  $\frac{625R}{729}$  برای چهارمین رویه با ۷۲۹ مقاومت و به طور کلی با تعمیم به مراتب بالاتر برای n امین رویه تکثیر یافته ( $3^{n+1}$  مقاومت) بین دو رأس خارجی به صورت  $R \frac{2 \times 5^n}{3^{n+1}}$  خواهد بود.

این فرمول عمومی تابعی از عدد تکثیر است. اما این پرسش مطرح می‌شود: اگر یک رویه به طول L و دیگری به طول L' داشته باشیم رابطه بین دو مقاومت چیست؟

مثلاً اگر مقاومت گرمایی یک ماده بی‌ریخت را در نظر بگیریم این مقاومت‌ها چگونه در اندازه‌های مختلف تغییر می‌کند؟ اکنون می‌خواهیم رابطه بین مقاومت و اندازه را به دست آوریم. در رویه سرپینسکی اندازه، همان فاصله رأس به رأس یعنی



▲ شکل ۴.

شکل ۴-b-ε مربوط به ورق مقاومتی دو بعدی است. اگر طول و عرض آن را دو برابر کنیم با ثابت نگه داشتن ضخامت t مقاومت ثابت می‌ماند.

$$A = tL \rightarrow R = \frac{\rho}{t} \quad (14)$$

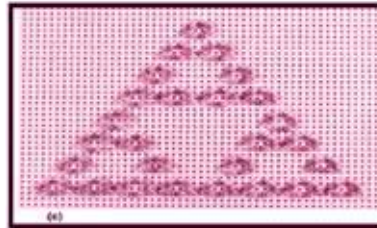
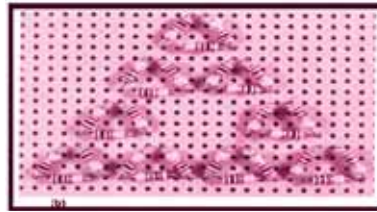
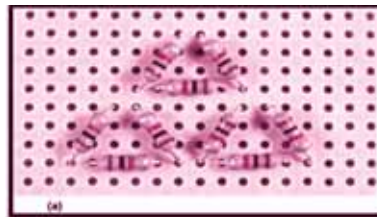
پس در دو بعدی‌ها داریم:

$$R \sim L^{-1}$$

در حالت کلی برای اجسام اقلیدسی با بعد d مقاومت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R \sim L^{2-d}$$

حال برای اجسامی با هندسه پیچیده‌تر از هندسه اقلیدسی مثلاً جامد بی‌ریخت مقاومت چگونه با طول مشخصه تغییر می‌کند؟ برای شبکه مقاومتی سرپینسکی شکل ۵ معادله ۱۳ نمی‌تواند استفاده شود.



▲ شکل ۵.

## مجموعه مسئله‌های ناب فیزیک

این مجموعه از پنج کتاب با عناوین زیر تشکیل شده است:

- مکانیک
- الکتریسیته، مغناطیس و مدارهای الکتریکی
- سیالات و ترمودینامیک
- نور، امواج و فیزیک نوین
- آزمون‌های جامع

نام مؤلف: سیداحمد رضا حسینی

ناشر: انتشارات فاطمی (۰۲۱-۸۸۹۴۵۵۴۵)

آذر درخشان



درک عمیق فیزیک و یافتن شهود پدیده‌های مختلف و تحلیل آن‌ها، ارتباط تنگاتنگی با حل مسائل متعدد و متنوع دارد. حل مسئله و تمرین یکی از بهترین راه‌ها برای افزایش تسلط بر مباحث علم فیزیک و توانایی حل مسئله است. مجموعه «مسئله‌های ناب فیزیک» بادر اختیار گذاشتن مسئله‌های گوناگون در مباحث مختلف فیزیک، از پرسش‌های نسبتاً ساده تا پرسش‌های ترکیبی و خلاقانه، این فرصت را در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد تا ضمن تعمیق در مطالب کتاب درسی و آمادگی برای شرکت در آزمون المپیاد، بهتر به دنیای اطراف خود بنگرند و هوشمندانه و منظم ببینند.

در این مجموعه، از مسئله‌های آزمون‌های مرحله اول المپیاد فیزیک ایران، مسئله‌های معتبر کشورهای جهان و تعداد زیادی مسئله تألیفی استفاده شده که به صورت موضوعی و از آسان تا دشوار مرتب شده است. حدود نیمی از پرسش‌ها از آزمون مرحله اول تا بیست و ششم (البته در صورت لزوم با اندکی تغییر برای هماهنگی با شیوه طرح پرسش در آزمون‌های سال‌های اخیر) و نیم دیگر به صورت تألیفی یا از منابع معتبر دیگر مانند پرسش‌های کنکور، کتاب‌های معتبر جهانی و... آورده شده است. در این کتاب پاسخ تشریحی مسئله‌ها به گونه‌ای تهیه شده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان بتوانند بدون نیاز به معلم نیز از این کتاب‌ها بهره ببرند و سطح علمی خود را ارتقا دهند.

مؤلف این مجموعه سیداحمد رضا حسینی، دارنده مدال نقره جهانی المپیاد فیزیک ۲۰۰۵ است.

مطالعه این کتاب برای دانش‌آموزان ممتاز دبیرستان، علاقه‌مندان به شرکت در المپیاد فیزیک، دبیران فیزیک و دانشجویان ترم یک و دو رشته‌های علوم پایه و مهندسی مفید خواهد بود.

طول رویه است. فرض می‌کنیم مقاومت بین رأس‌ها بر حسب طول رویه است:

$$(15)$$

$$R(L) = \alpha L^s$$

که  $\alpha$  ثابت تناسب و  $s$  بعد فراکتالی رویه است. با مقایسه مقاومت برای صفرمین درجه تکثیر  $2R/3$ ، برای اولین درجه  $10R/9$  است. می‌بینیم که  $R(2L) = 5/3 R(L)$ . اگر رابطه بازگشتی برای معادله بالا بنویسیم به دست می‌آوریم:

$$(16)$$

$$R(2L) = \alpha(2L)^s = \frac{5}{3} R(L) = \frac{5}{3} \alpha L^s$$

که نتیجه می‌شود:

$$\log \frac{5}{3} = s \log 2$$

و در نتیجه بعد فراکتالی به صورت  $s = \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2} = 0.737$  به دست می‌آید.

این روش تحلیل رویه سرپینسکی می‌تواند برای تحلیل یک شبکه تصادفی دلخواه تعمیم داده شود [۳].

## ۴. فعالیت پیشنهادی در کلاس

در کلاس درس می‌توان این نتایج تحلیلی ریاضی را به صورت عملی در قالب فعالیت دانش‌آموزان به شکل گروهی بررسی کرد. به این صورت که هر مرتبه از رویه را با مقاومت‌های یک کیلو اهمی تشکیل داد و هر بار با اتصال اهم متر مقاومت رأس به رأس را اندازه‌گیری و با نتایج ریاضی مقایسه کرد.

## ۵. نتیجه‌گیری

انجام این فعالیت دم دستی در کلاس می‌تواند به عنوان نقطه شروعی برای دانش‌آموزان جهت انجام طرح‌های نمایشگاهی یا رقابتی باشد که هدف آن درک مسئله‌های جریان‌های سری و موازی است. این مطالعه یکی از کاربردهای هندسه فراکتالی را در حل مسائل فیزیک بررسی می‌کند. از فراکتال‌ها به منظور آسان‌سازی در کارهای وابسته به مدل‌سازی پیچیدگی در زمینه‌های گوناگون علمی و مهندسی استفاده می‌شود. مسلماً کاربردهای فراوانی از آن‌ها در حل مسائل فیزیک مانند چگونگی رسانش الکتریکی یا گرمایی در اجسام، محاسبه مقاومت شاره مثلاً شار نفت از سنگ‌های متخلخل در استخراج نفت و... در کل مطالعه ترمودینامیکی و فیزیکی دستگاه‌های بی‌نظم وجود دارد.

## ← مراجع

- [1]. <http://fa.wikipedia.org>
- [2]. Thomas, David A. (2002), Modern Geometry, Books cool, chapter 5.
- [3]. Ching; WK, Erickson; M, Overcoming Resistance with Fractals: A new Way to Teach Elementary Circuits
- [۴]. مترجم: وثیق‌زاده انصاری؛ حمید، چرایی شکل‌های متفاوت دانه‌های برف، سایت راسخون
- [۵]. جعفری، علی‌اکبر؛ زیبایی‌های ریاضی فراکتال‌ها، سایت آخاله